4 Algebraické rovnice a nerovnice

> Matematika je stenografie abstraktního myšlení. Je-li používána správně, nenechává prostor žádné neurčitosti ani nepřesné interpretaci. (Louis de Broglie)

4.1 Základní pojmy

Rovnost: Jsou-li dvě čísla nebo dva výrazy sobě rovny, pak zápis, který tuto skutečnost vyjadřuje, nazýváme **rovností**, např. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nebo $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Výraz vlevo (vpravo) od rovnítka se nazývá levá (pravá) strana rovnosti.

Rovnice: Zápis s rovnítkem může kromě známých čísel (ať už konkrétních nebo obecných zapsaných písmeny) obsahovat ještě čísla **neznámá**. Takový zápis nazýváme **rovnicí**. Rovnici lze obecně zapsat ve tvaru $L(x) = P(x)$, kde výraz $L(x)$ je levá strana rovnice, $P(x)$ pak pravá strana rovnice. Hodnoty neznámé, po jejichž dosazení do rovnice obdržíme rovnost, nazýváme **kořeny rovnice (popř. řešení rovnice)**. Jestliže kořeny rovnice jsou všechny hodnoty, pro které má daný výraz smysl, nazýváme rovnici **rovnicí identickou**. Často bývá zadána také množina, ve které má neznámá ležet – tzv. **obor řešení.**

Řešme rovnici $(2x-1)\cdot(x+1) = 0$ **v množině** $\mathbb{Z}$. Tato rovnice má **jediný kořen** $x = -1$. Rovnici samozřejmě vyhovuje i číslo 0.5, které však **neleží v zadaném oboru řešení,** a proto není kořenem rovnice.

Při řešení rovnice však pracujeme nejen s oborem řešení, ale i s **definičním oborem rovnice**. Je to množina, ve které jsou definovány hodnoty všech výrazů, které se v dané rovnici vyskytují. Definiční obor rovnice budeme značit $\mathbf{D}$.

1. Příklad: Máme řešit rovnici $\frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x-2)} = 0$ v množině $\mathbb{R}$. Výraz na levé straně není pro $x = 1$ a $x = 2$ definován (pro tyto hodnoty by měl ve jmenovateli nulu). Definičním oborem této rovnice je tedy množina $\mathbf{D} = \mathbb{R} - \{1;2\}$.

Nerovnost: Nejsou-li dvě čísla nebo výrazy sobě rovny, pak zápis, který tuto skutečnost vyjadřuje, nazýváme nerovností, např. $\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \sqrt{2}$ nebo $|a+b| \leq |a| + |b|$. Výraz vlevo (vpravo) od znaménka nerovnosti se nazývá levá (pravá) strana nerovnosti.

Nerovnice: Zápis se znaménkem nerovnosti může kromě známých čísel (ať už konkrétních nebo obecných zapsaných písmeny) obsahovat ještě čísla **neznámá**. Takový zápis nazýváme **nerovnicí**. Hodnoty neznámé, po jejichž dosazení do nerovnice obdržíme nerovnost, nazýváme **řešením nerovnice**. Množinu všech řešení dané rovnice, popř. nerovnice budeme značit K.

Algebraické rovnice (nerovnice) jsou rovnice (nerovnice), v nichž se vyskytují pouze tzv. algebraické operace s neznámou (tj. sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování). Algebraické rovnice (nerovnice) dělíme na **iracionální** (neznámá pod odmocninou popř. s racionálním mocnitelem) a **racionální** (neznámá není pod odmocnimou)

Transcendentní rovnice (nerovnice) jsou rovnice (nerovnice), v nichž alespoň jedna operace s neznámou není algebraická (např. rovnice $\sin 2x = \cos x$)

V této kapitole se budeme věnovat rovnicím algebraickým. Některým transcendentním rovnicím se budeme věnovat později.

S pojmem **řešení rovnice** se setkáváme v několika významech:

1) řešení rovnice = jeden kořen rovnice
2) řešení rovnice = množina všech kořenů rovnice
3) řešení rovnice = proces nalezení kořenů rovnice.

Konkrétní význam tohoto termínu bývá zřejmý ze souvislostí.

Ekvivalentní rovnice – jsou dvě rovnice, Jejichž množiny všech kořenů jsou si rovny.

Ekvivalentní úprava – je taková úprava rovnice, která ji převádí na rovnici ekvivalentní.
Jde o

- přičtení, popř. odečtení téhož čísla nebo výrazu k oběma stranám rovnice
- násobení, popř. dělení obou stran rovnice týmž číslem nebo výrazem **různým od nuly**.

Zkouška – dosazení všech zjištěných kořenů do původní rovnice a ověření rovnosti levé a pravé strany.

Jestliže při řešení rovnice použijeme jen ekvivalentní úpravy, zkouška není „povinná“ (není součástí řešení). Slouží pouze pro kontrolu, zda jsme se při řešení nedopustili nějaké chyby (např. špatně nevynásobili dvě čísla).

2. Příklad:

$$\frac{x+3}{2}+\frac{x+2}{3}=3 \quad /\cdot 6$$
$$3(x+3)+2(x+2)=3\cdot 6$$
$$3x+9+2x+4=18$$
$$5x=5 \quad /:5$$
$$x=1$$

Při řešení této rovnice jsme použili jen **ekvivalentní úpravy, zkouška není součástí řešen**í. Množina všech řešení je tedy $K=\{1\}$.

$$\sqrt{x+16}=x+4 \quad /^2$$
$$x+16=x^2+8x+16$$
$$0=x^2+7x$$
$$0=x(x+7)$$
$$x_1=0$$
$$x_2=-7$$

V tomto řešení jsme se nedopustili žádné numerické chyby, všechny operace s danou rovnicí jsou správné. Hned ta první (umocňování) je však úpravou neekvivalentní. To má za následek, že jsme mohli nalézt i kořeny, které původní rovnici nevyhovují. **Při použití neekvivalentních úprav zkoušku udělat musíme v každém případě** (zkouška je součástí řešení):

Zkouška: provádí se dosazením nalezených kořenů do levé (L) a pravé (P) strany původní rovnice. Je-li $L = P$, dosazované číslo je kořenem; je-li $L \neq P$, dosazované číslo kořenem není. V našem případě je

$$x_1 = 0: \ L = \sqrt{0+16} = 4; \ P = 0 + 4 = 4 \ ; \ L = P$$
$$x_2 = -7: L = \sqrt{-7+16} = \sqrt{9} = 3; \ P = -7 + 4 = -3 \ ; \ L \neq P$$

Kořenem dané rovnice je tedy pouze číslo $x_1 = 0$, tj. $K = \{0\}$

Pozor: častá chyba:

$$\begin{aligned} (x+1)(x-3) &= x+1 \quad / : (x+1) \\ x-3 &= 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Číslo $x = 4$ je skutečně kořenem rovnice. Kořenem je ale také číslo $x = -1$, které jsme však tímto nesprávným postupem nenašli. Hned v první úpravě je totiž skryto dělení nulou, které je častou příčinou „poztrácení“ kořenů.

Správný postup:

$$\begin{aligned} (x+1)(x-3) &= x+1 \\ (x+1)(x-3)-(x+1) &= 0 \\ (x-1)(x-3-1) &= 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 4 \\ K &= \{1;4\} \end{aligned}$$

4.2 Lineární rovnice a nerovnice s jednou neznámou

Lineární rovnice s neznámou x: je každá rovnice, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na tvar $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

1. Příklad: Řešme rovnici $7x + 13 = 3x + 5$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} 7x+13 &= 3x+5 \\ 7x-3x &= 5-13 \\ 4x &= -8 \\ x &= -\frac{8}{4} \\ x &= -2 \\ K &= \{-2\} \end{aligned}$$

2. Příklad: Řešme rovnici $5(2-x) = -5x - 7$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} 5(2-x) &= -5x-7 \\ 10-5x &= -5x-7 \\ 0 &= -7-10 \\ 0 &= -17 \end{aligned}$$

Rovnice nemá řešení, tj. $K = \varnothing$.

3. Příklad: Řešme rovnici $\frac{1}{2}\cdot\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(4x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot(6x-5)-\frac{2}{3}$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(4x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot(6x-5)-\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}=\frac{6}{4}x-\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}x=-\frac{5}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$$

$$-\frac{4}{3}x=\frac{-45-24+9-4}{36}$$

$$-\frac{4}{3}x=\frac{-64}{36}$$

$$x=\frac{64\cdot 3}{36\cdot 4}$$

$$x=\frac{4}{3};\qquad \frac{4}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow K=\left\{\frac{4}{3}\right\}$$

4. Příklad: Řešme rovnici $\frac{6+25x}{15}-(x-1)=\frac{2x}{3}+\frac{7}{5}$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\frac{6+25x}{15}-(x-1)=\frac{2x}{3}+\frac{7}{5}\quad /\cdot 15$$

$$6+25x-15(x-1)=10x+21$$

$$6+25x-15x+15=10x+21$$

$$0\cdot x=0$$

Řešením je každé $x\in\mathbb{R}$, tj. $K=\mathbb{R}$ (jedná se o identickou rovnici).

Lineární nerovnice s neznámou x: je každá nerovnice, kterou lze převést na jeden z tvarů $ax+b>0$; $ax+b\ge 0$; $ax+b<0$; $ax+b\le 0$, kde $a,b\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$. Při řešení nerovnic používáme tytéž úpravy jako při řešení rovnic s jedinou (ale velmi podstatnou) výjimkou, která je zřejmá z následujícího příkladu:

$$2\ \boxed{<}\ 3\quad /\cdot(-2)$$

$$-4\ \boxed{>}\ -6$$

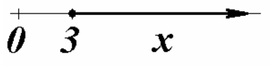
Z tohoto jednoduchého faktu vyplývají dvě důležité zásady:

a) Při násobení, resp. dělení nerovnice záporným číslem otáčíme znaménko nerovnosti.
b) Umocňovat nerovnici lze pouze tehdy, mají-li obě její strany stejná znaménka: Jsou-li obě strany kladné, násobíme kladným číslem, znaménko nerovnosti neměníme. Jsou-li obě strany záporné, násobíme záporným číslem a znaménko nerovnosti je třeba otočit. **Nerovnici, jejíž strany mají různá znaménka, nelze umocňovat.**

5. Příklad: Řešme nerovnici $3x-7 \le 5x-13$ v množině $\mathbb{R}$.
Řešení:

$$3x-7 \le 5x-13$$
$$3x-5x \le -13+7$$
$$-2x \le -6 / \quad \boxed{.(-2)}$$
$$x \ge 3$$

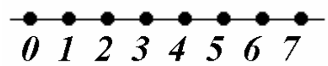
Řešením jsou právě všechna čísla x, pro která platí $x \in \langle 3;\infty)$; $K = \langle 3;\infty)$.
Grafické znázornění:



6. Příklad: Řešme nerovnici $x-7 < 8-x$ v množině $\mathbb{N}$.
Řešení:

$$x-7 < 8-x$$
$$2x < 15$$
$$x < \frac{15}{2}$$

Vzhledem k tomu, že nerovnici řešíme v množině $\mathbb{N}$, jsou řešením právě všechna x, pro která platí $x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$, tj. $K = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ (připomeňme úmluvu z kapitoly 2.1: $0 \in \mathbb{N}$).
Grafické znázornění:

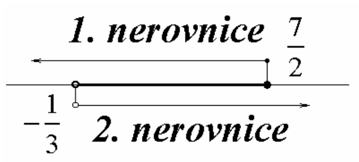


Soustavy lineárních nerovnic s neznámou x: Při řešení soustavy lineárních nerovnic s jednou neznámou hledáme neznámá čísla, která vyhovují zároveň několika nerovnicím. Množina všech řešení je pak průnikem množin všech řešení jednotlivých rovnic.

7. Příklad: Řešme soustavu nerovnic $2x-7 \le 0$; $3x+1 > 0$ v množině $\mathbb{R}$.
Řešení:

$$2x-7 \le 0 \qquad 3x+1 > 0$$
$$x \le \frac{7}{2} \qquad x > -\frac{1}{3}$$

Hledaná čísla musí vyhovovat oběma nerovnicím současně:



$$-\frac{1}{3} < x \le \frac{7}{2}$$

Množinový zápis řešení: $K_1 = \left(-\infty;-\frac{7}{2}\right\rangle$; $K_2 = \left(-\frac{1}{3};\infty\right)$

$$K = K_1 \cap K_2 = \left(-\infty;-\frac{7}{2}\right\rangle \cap \left(-\frac{1}{3};\infty\right) = \left(-\frac{1}{3};\frac{7}{2}\right\rangle$$

8) Řešme soustavu nerovnic $2x-7 < 0$; $3x+1 \ge 0$ v množině $\mathbb{R}$.
Řešení:

$$2x-7 > 0 \qquad 3x+1 \le 0$$
$$x > \frac{7}{2} \qquad x \le -\frac{1}{3}$$

Nerovnice nemá řešení, tj. $K = \emptyset$.

Rovnice v součinovém tvaru je rovnice tvaru $L(x) = 0$, kde levá strana je součinem několika činitelů. Tento součin je roven nule právě tehdy, když alespoň jeden z činitelů je roven nule.

9. Příklad: Řešme rovnici $(x-2)(2x+3) = 0$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení: Hledané číslo je řešením rovnice právě tehdy, když

$$x - 2 = 0 \quad \text{nebo} \quad 2x + 3 = 0$$

tj. $$x = 2 \quad \text{nebo} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Množina všech řešení dané rovnice je tedy $K = \left\{2; -\frac{3}{2}\right\}$.

Nerovnice v součinovém tvaru: Je nerovnice v některém z tvarů $L(x) < 0$; $L(x) > 0$; $L(x) \le 0$; $L(x) \ge 0$, kde levá strana je součinem několika činitelů. Tento typ nerovnic lze s výhodou řešit pomocí tzv. nulových bodů dle následujícího příkladu:

10. Příklad: Řešme nerovnici $(4-7x)(x+1)(10x-7)(3-x) \le 0$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení: Nejdříve určíme body, ve kterých jsou jednotlivé závorky rovny nule (nulové body):

$4 - 7x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{7}$; podobně $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{7}{10}$; $x_4 = 3$.

Tyto čtyři body rozdělí číselnou osu na pět intervalů. V těchto intervalech zjistíme znaménka jednotlivých závorek. Podle toho pak lze určit znaménko součinu. Vše je výhodné zapsat formou tabulky:

x	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{7}; \frac{7}{10}\right)$	$\left(\frac{7}{10}; 3\right)$	$(3; \infty)$
$4-7x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$10x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$L(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Má-li tedy být $L(x) \le 0$, musí být $x \in \left\langle -1; \frac{4}{7} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{10}; 3 \right\rangle$ (v nerovnici je připuštěna rovnost, řešením jsou tedy i všechny nulové body).

Rovnice v podílovém tvaru: je rovnice, kterou lze převést na tvar $\frac{M(x)}{N(x)} = 0$, kde na levé straně je racionální lomený výraz. Převod uskutečníme převedením všech výrazů na levou stanu rovnice a převodem na společného jmenovatele. Lomený výraz je pak roven nule právě tehdy, je-li roven nule jeho čitatel:

11. Příklad: Řešme rovnici $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-6}$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\frac{x-1}{x-3}=\frac{x+3}{x-6}$$

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+3}{x-6}=0$$

$$\frac{(x-1)(x-6)-(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-6)}=0$$

$$(x-1)(x-6)-(x+3)(x-3)=0$$

$$x^2-7x+6-x^2+9=0$$

$$-7x=-15$$

$$x=\frac{15}{7}$$

Při řešení těchto rovnic je třeba pečlivě kontrolovat podmínky, za kterých má daná rovnice smysl (definiční obor řešení):

12. Příklad: V množině $\mathbb{R}$ řešme rovnici

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{7x-15}{9-x^2}=\frac{x-3}{x+3}$$

Řešení:

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{7x-15}{9-x^2}=\frac{x-3}{x+3}$$

$$\frac{x+3}{x-3}+\frac{7x-15}{(3-x)(3+x)}-\frac{x-3}{x+3}=0$$

$$\frac{-(x+3)^2+7x-15+(x-3)^2}{(3-x)(3+x)}=0$$

$$-x^2-6x-9+7x-15+x^2-6x+9=0$$

$$-5x=15$$

$$x=-3$$

Tento výsledek svádí k závěru, že $K=\{-3\}$. Tento závěr je však chybný, neboť pro $x=-3$ zadaná rovnice není definována a tato hodnota nepatří do definičního oboru rovnice – $\mathbf{D}=\mathbb{R}-\{-3\}$. Je tedy $K=\emptyset$ – zadaná **rovnice nemá řešení**.

Nerovnice v podílovém tvaru: je nerovnice, kterou lze převést na jeden z tvarů $\frac{M(x)}{N(x)}>0$; $\frac{M(x)}{N(x)}<0$; $\frac{M(x)}{N(x)}\le 0$; $\frac{M(x)}{N(x)}\ge 0$, kde na levé straně je racionální lomený výraz. Převod uskutečníme opět převedením všech výrazů na levou stranu rovnice a převodem na společný jmenovatel. Dále řešíme pomocí nulových bodů.

13. Příklad: Řešme nerovnici $\frac{x+1}{x+2}\le\frac{4-x}{1-x}$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\frac{x+1}{x+2} \le \frac{4-x}{1-x}$$

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \le 0$$

$$\frac{(x+1)(1-x)-(4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \le 0$$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \le 0$$

x	$\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right)$	$-\frac{7}{2}$	$\left(-\frac{7}{2};-2\right)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;\infty)$
$-2x-7$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$L(x)$	$-$	0	$+$	*nedefinováno*	$-$	*nedefinováno*	$+$

$$x \in \left(-\infty\ ;-\frac{7}{2}\right\rangle \cup (-2;1)$$

Ve slovních úlohách, které vedou na lineární rovnice či nerovnice, se často vyskytují „slovní popisy“ matematických výrazů.

14. Příklad: Skutečnost, že **kladné** číslo a je

a) o tři menší než číslo x, zapíšeme $a = x-3$;

b) třikrát menší než číslo x, zapíšeme $a = \frac{x}{3}$;

c) pětkrát menší, než podíl čísel $7;b$, zapíšeme $a = \frac{7}{b}:5$;

d) o r menší, než druhá mocnina čísla p, zapíšeme $a = p^2 - r$;

e) r-krát menší, než třetí mocnina čísla p, zapíšeme $a = \frac{p^3}{r}$;

f) c krát větší, než než podíl čísel $3;y$, zapíšeme $a = c\cdot\frac{3}{y}$;

g) čtyřikrát menší než číslo q zmenšené o 4, zapíšeme $a = \frac{q-4}{4}$;

15. Příklad: Které kladné číslo je třikrát větší, než jeho pětina zvětšená o šest?

Řešení:

Neznámé (hledané) číslo	x
Pětina hledaného čísla	$\frac{x}{5}$
Pětina čísla x zvětšená o šest	$\frac{x}{5}+6$

Trojnásobek tohoto čísla	$3\cdot\left(\frac{x}{5}+6\right)$
Rovnice	$3\cdot\left(\frac{x}{5}+6\right)=x$
Kořen	$x=45$

Hledané číslo je číslo 45.

U slovních úloh je třeba vždy provést „korekci realitou“, tj. přesvědčit se o tom, že nalezené řešení má smysl v situaci, která je slovně popsána v zadání úlohy.

16. Příklad: Otec je o 24 roky starší než jeho šestnáctiletý syn. Za kolik let bude otec třikrát starší než syn?

Řešení:	Neznámá (hledaný počet let)	x
	Synovo stáří po x letech	$16+x$
	Otcovo stáří po x letech	$16+24+x$ tj. $40+x$
Má tedy platit:		$3\cdot(16+x)=40+x$

Tato rovnice má řešení $x=-4$. Otec tedy „bude“ třikrát starší než syn za -4 roky, tj. tato situace již nastala, a to před čtyřmi lety.

17. Příklad: Otci je 46 let, synům 14, 20 a 24 let. Za kolik let buce otec třikrát starší, než všichni synové dohromady?

Řešení:	Neznámá (hledaný počet let)	x
	Stáří 1. syna po x letech	$14+x$
	Stáří 2. syna po x letech	$20+x$
	Stáří 3. syna po x letech	$24+x$
	Stáří všech synů dohromady	$(14+x)+(20+x)+(24+x)$, tj. $58+3x$
	Otcovo stáří nyní	46
	Otcovo stáří po x letech	$46+x$
Má tedy platit		$46+x=3\cdot(58+3x)$

Tato rovnice má řešení $x=-16$. Podle této rovnice tedy úloze vyhovuje situace před šestnácti lety. To však není možné, protože před šestnácti lety nejmladší syn nebyl ještě na světě. Úloha tedy nemá řešení.

18. Příklad: Studenti pracovali na brigádě v úkolu. Za sklizeň čtyř hektarů lnu měli dostat $4\,800,-$ Kč. Do jejich skupiny však byli přiřazeni další tři studenti, a tak dostal každý o $80,-$ Kč méně, než by mu připadlo podle původní dohody. Kolik studentů bylo ve skupině?

Řešení:	Neznámá (původní počet studentů)	x
	Původní odměna skupiny	$4\,800$
	Původní odměna jednoho studenta	$\frac{4\,800}{x}$
	Zvýšený počet studentů	$x+3$
	Nová odměna jednoho studenta	$\frac{4\,800}{x+3}$
Má tedy platit		$\frac{4\,800}{x}-80=\frac{4\,800}{x+3}$

Tato rovnice má kořeny $x_1=12$; $x_2=-15$. Druhý z nich úloze nevyhovuje, protože počet studentů nemůže být záporný. Ve skupině tedy bylo původně dvanáct studentů.

19. Příklad: Nádrž se naplní třemi kohouty za $6\,\text{min}\,40s$. Prvním kohoutem by se naplnila za $15\,\text{min}$, druhým za $20\,\text{min}$. Jak dlouho by se plnila třetím kohoutem?

Řešení: Neznámá (počet minut plnění 3. kohoutem) x

1. kohoutem za minutu $\frac{1}{15}$ nádrže

2. kohoutem za minutu $\frac{1}{20}$ nádrže

3. kohoutem za minutu $\frac{1}{x}$ nádrže

Všemi kohouty za minutu $\frac{1}{6\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{20}{3}}=\frac{3}{20}$ nádrže

Má tedy platit $\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{x}=\frac{3}{20}$

Tato rovnice má řešení $x=30$, třetím kohoutem by se tedy nádrž naplnila za 30 minut.

Neřešené úlohy:

Řešte v $\mathbb{R}$ a proveďte zkoušku:

1) $8(3x-5)-5(2x-8)=20+4x$

2) $(8-3x)^2+(5-4x)^2-6=(9-5x)^2+20x-4$

3) $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$

4) $\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(4x-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}(6x-5)-\frac{2}{3}$

5) $\frac{3(x+1)}{2}-\left(\frac{x+1}{4}+1\right)=\frac{5x+1}{7}-\left(\frac{3x-1}{2}-3\right)$

6) $\frac{6+25x}{15}-(x-1)=\frac{2x}{3}+\frac{7}{5}$

7) $\frac{12}{1-9x^2}=\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}$

8) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-1=\frac{6x}{x^2+x-2}$

9) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{5}{x^2+6}$

Řešte rovnice v daných množinách:

10) $\frac{5x-11}{2}-\frac{5x+3}{5}=\frac{50-22x}{10}$ v množině $\mathbb{N}$.

11) $(x-3)(x+2)=(x-2)(x-1)$ v intervalu $\langle -2;4\rangle$.

12) Cyklista vyjel v 15 hod. rychlostí 15 km/h. O dvě hodiny později z téhož místa vyjel za ním motocyklista rychlostí 60 km/h. V kolik hodin ho dostihne?

13) Jeden řemeslník vykoná svěřenou práci za deset dní, druhý tutéž práci za patnáct dní. Za jak dlouho vykonají tuto práci oba řemeslníci společně?

Řešte nerovnice

14) $2x+7<3x-4$ **15)** $\frac{2x+1}{3}<\frac{2x-1}{5}$ **16)** $(x-3)^2+(x+1)^2<2x^2-6x+13$

Řešte nerovnice v daných množinách:

17) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}<1;\ x\in\mathbb{N}$ **18)** $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+3}{2}<3-\frac{x-2}{3};\ x\in\mathbb{N}_0$

19) $8x+3\le\frac{1}{2}-x;\ x\in A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x>-5\}$

Výsledky:

1) 2 **2)** $\frac{1}{3}$ **3)** 2 **4)** $\frac{4}{3}$ **5)** $\frac{5}{3}$ **6)** $\mathbb{R}$ **7)** -1 **8)** rovnice nemá řešení **9)** -12

10) 3 **11)** 4 **12)** 17 h 40 min **13)** šest dní **14)** $(11;\infty)$ **15)** $(-\infty;-2)$

16) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$ **17)** 1 **18)** $\{1;2;...;10\}$ **19)** $\{-4;-3;-2;-1\}$

4.3 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Tyto rovnice a nerovnice řešíme pomocí nulových bodů výrazů v absolutních hodnotách.

1. Příklad: Řešme rovnici $|x-5|=2$.
Řešení: Pro $x\in(-\infty;5)$ je $x-5<0$; pro $x\in(5;\infty)$ je $x-5>0$. Je tedy:

	$x\in(-\infty;5)$	$x\in(5;\infty)$
$x-5$ $\|x-5\|$	$-$ $-x+5$	$+$ $x-5$
	$-x+5=2$ $x=3$	$x-5=2$ $x=7$

Pro $x\in(-\infty;5)$ je tedy $x=3$; pro $x\in(5;\infty)$ pak $x=7$. Množina všech řešení je $K=\{3;7\}$.

2. Příklad: Řešme rovnici $|x-2|+|2x-8|=5$.

Řešení:

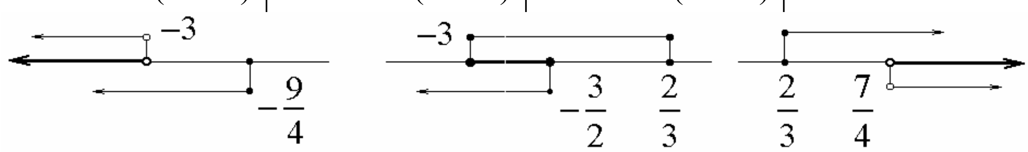
	$x\in(-\infty;2)$	$x\in(2;4)$	$x\in(4;\infty)$
$x-2$ $2x-8$	$-$ $-$	$+$ $-$	$+$ $+$
$\|x-2\|$ $\|2x-8\|$	$-x+2$ $8-2x$	$x-2$ $8-2x$	$x-2$ $2x-8$
	$2-x+8-2x=5$ $x=\frac{5}{3}$	$x-2+8-2x=5$ $x=1$	$x-2+2x-8=5$ $x=5$

Pro $x \in (-\infty; 2)$ jsme nalezli hodnotu $x = \frac{5}{3}$; pro $x \in (2; 4)$ hodnotu $x = 1$ a pro $x \in (4; \infty)$ pak hodnotu $x = 5$. Podmínka v záhlaví tabulky a odpovídající nalezený výsledek musí platit současně. Hodnotu $x = \frac{5}{3}$ jsme našli za podmínky, že $x \in (-\infty; 2)$. Tyto podmínky současně platí, tj. $x = \frac{5}{3}$ je opravdu řešením zadané rovnice. Hodnota $x = 1$ je řešením pouze v případě, že současně platí $x \in (2; 4)$. Tyto dvě podmínky však nemohou platit současně, v intervalu $x \in (2; 4)$ tedy rovnice nemá řešení. Hodnota $x = 5$ řešením je. Množina všech řešení je tedy rovna

$$K = \left\{\frac{5}{3}\right\} \cup \emptyset \cup \{5\} = \left\{\frac{5}{3}; 5\right\}.$$

3. Příklad: Řešme nerovnici $|x+3| \geq 8 - |2-3x|$.

	$x \in (-\infty; -3)$	$x \in \left\langle -3; \frac{2}{3} \right\rangle$	$x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$
$x+3$ $2-3x$	$-$ $+$	$+$ $+$	$+$ $-$
$\lvert x+3\rvert$ $\lvert 2-3x\rvert$	$-x-3$ $2-3x$	$x+3$ $2-3x$	$x+3$ $3x-2$
	$-x-3 \geq 8-(2-3x)$	$x+3 \geq 8-(2-3x)$	$x+3 \geq 8-(3x-2)$
	$x \leq -\frac{9}{4}$		



$$x \in (-\infty; -3) = K_1 \qquad x \in \left\langle -3; -\frac{3}{2} \right\rangle = K_2 \qquad x \in \left\langle \frac{7}{4};\ \infty \right) = K_3$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-\infty; -3) \cup \left\langle -3; -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4};\ \infty \right) = \left(-\infty;\ -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4};\ \infty \right).$$

Neřešené úlohy:

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1) $7 - 4x = |4x - 7|$

2) $x + |x - 3| = 5$

3) $|x| - |x - 1| = 2$

4) $|x - 2| + |x + 2| = 2x + 2$

5) $|2x + 1| + |2x - 1| = 3$

6) $|x + 5| - |x - 2| = |x| - x + 7$

7) $|x| + 2|x + 2| - 3|x - 3| = 0$

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

8) $|x-3| \le 2$

9) $|x-3| > 5$

10) $3|x+4| - |3x+2| < 0$

11) $|x| < |x-1| - |x+1|$

12) $|x+2| - 2|2x+4| \le |3x-1|$

Výsledky: **1)** $\left(-\infty;\ \frac{7}{4}\right\rangle$ **2)** 4 **3)** rovnice nemá řešení **4)** 1 **5)** $\pm\frac{3}{4}$ **6)** $(2;\infty)$

7) $\frac{7}{6}$ **8)** $\langle 1;5 \rangle$ **9)** $\mathbb{R} - \langle -2;\infty)$ **10)** $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right)$ **11)** $(-2;0)$ **12)** $\mathbb{R}$

4.4 Soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

Dvojici rovnic

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, nazýváme **soustavou dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými** x, y. **Řešením** této soustavy nazýváme každou uspořádanou dvojici $[x_0, y_0]$, která vyhovuje oběma rovnicím současně.

Tato soustava může mít buď jedno řešení, nebo nekonečně mnoho řešení, nebo žádné řešení. **Pozor!** Jedna **uspořádaná dvojice** $[x_0, y_0]$ **je jedním řešením**.

Tyto soustavy řešíme buď metodou dosazovací nebo metodou sčítací.

Dosazovací metoda: z některé rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do rovnice druhé. Obdržíme tak jednu lineární rovnici o jedné neznámé.

1. Příklad: V množině $\mathbb{Q}$ řešme soustavu

$$3u + 2v = -4$$
$$2u - 3v = 19$$

Řešení: Ze druhé rovnice vyjádříme u: $u = \frac{19+3v}{2}$

a dosadíme do rovnice první:

$$3 \cdot \frac{19+3v}{2} + 2v = -4$$
$$3 \cdot (19+3v) + 4v = -8$$
$$13v = -8 - 57$$
$$v = -\frac{65}{13}$$
$$v = -5$$

Dosazením do druhé rovnice dopočítáme u:

$$
\begin{aligned}
2u - 3\cdot(-5) &= 19 \\
2u &= 19 - 15 \\
u &= 2
\end{aligned}
$$

Je tedy $[u,v] = [2;-5]$.

Sčítaci metoda: Vhodným vynásobením jedné nebo obou rovnic a jejich následným sečtením (popř. odečtením) dostaneme jednu rovnici o jedné neznámé.

2. Příklad: V množině $\mathbb{Q}$ opět řešme soustavu

$$
\begin{aligned}
3u + 2v &= -4 \\
2u - 3v &= 19
\end{aligned}
$$

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
3u + 2v = -4 \,/\cdot 3 \\
\underline{2u - 3v = 19 \,/\cdot 2} \\
9u + 6v = -12 \\
\underline{4u - 6v = 38} \\
\quad 13u = 26 \\
\qquad u = 2
\end{array}
$$

Dosazením do kterékoli rovnice pak obdržíme $v = -5$, tedy $[u,v] = [2;-5]$.

3. Příklad: Za tři roky bude otec pětkrát starší než syn, za pět let jen čtyřikrát starší. Kolik let je otci a kolik synovi?

Řešení: Současný věk otce ...... x let za tři roky.... $(x+3)$ za pět let...... $(x+5)$

Současný věk syna..... y let za tři roky.... $(y+3)$ za pět let...... $(y+5)$

$x+3 = 5(y+3)$ $\qquad$ $x+5 = 4(y+5)$

Řešíme tedy soustavu

$$
\begin{array}{l}
x + 3 = 5(y+3) \\
\underline{x + 5 = 4(y+5)} \\
-(x - 5y = 12) \\
\underline{x - 4y = 15} \\
\qquad y = 3 \Rightarrow x = 27
\end{array}
$$

Otci je 27 let, synovi 3 roky.

Neřešené úlohy:

Řešte soustavy

1)
$$
\begin{aligned}
2x - y &= 1 \\
x + 3y &= 11
\end{aligned}
$$

2)
$$
\begin{aligned}
4x + 3y &= 6 \\
2x + y &= 4
\end{aligned}
$$

3)
$$
\begin{aligned}
x + 4y &= 37 \\
2x + 5y &= 53
\end{aligned}
$$

4)
$$\begin{aligned} 12y &= 11x - 196 \\ 12x &= 13y + 213 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} 2x + 7y - 18 &= 4(x + y) \\ 5x - 4y - 13 &= 2(x - y) \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} (x+4)(y-2) &= (x-5)(y+4) \\ (x+6)(y-1) &= (x-1)(y+2) \end{aligned}$$

7)
$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{5} - \frac{3y+2}{7} &= 2y - x \\ \frac{3x-1}{4} + \frac{7x+2}{6} &= 2x - y \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} \frac{2x-y+3}{3} - \frac{x-2y+2}{4} &= 4 \\ \frac{3x-4y+3}{4} + \frac{4x-2y-9}{3} &= 4 \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} \frac{4}{x-3y} &= \frac{7}{9x+2y} \\ \frac{3}{2x+y} &= \frac{9}{x-y+1} \end{aligned}$$

10)
$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2y} &= \frac{3}{2x-y} \\ \frac{4x-2y}{3(x-2y)} &= 1 \end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{x-4} - \frac{y+1}{y-2} &= 1 \\ \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2y+9}{y+2} &= 1 \end{aligned}$$

12)
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} &= -9 \end{aligned}$$
(návod: $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$ **)**

13) Zvětšíme-li šířku obdélníka o 5m a délku o 10m, zvětší se jeho obsah o 625m^2. Zvětšíme-li naopak šířku o 10m a délku o 5 m, zvětší se obsah o 625m^2. Určete rozměry obdélníka.

14) Po okruhu dlouhém 2 550m jezdí dva motocykly tak, že jezdí-li proti sobě, potkávají se každou minutu, jezdí-li týmž směrem, potkávají se každých pět minut. Určete jejich rychlosti.

Výsledky

1) $[2;3]$ **2)** $[3;-2]$ **3)** $[9;7]$ **4)** $[8;-9]$ **5)** $[15;16]$ **6)** $[8;4]$ **7)** $[7;4]$ **8)** $[7;5]$ **9)** $[1;-1]$ **10)** soustava má nekonečně mnoho řešení **11)** $[5;3]$ **12)** $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$ **13)** 35m, 45m **14)** 1.53 km/min 1.02 km/min

4.5 Soustava tří lineárních rovnic se třemi neznámými

Při řešení soustav více rovnic s více neznámými používáme stejné úpravy jako v předchozí kapitole, navíc můžeme vynechat rovnici, která je násobkem rovnice jiné. Soustavu (libovolného počtu) rovnic se třemi neznámými tak budeme převádět na soustavu dvou rovnic:

1. Příklad: Řešme soustavu:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 11 \\ x - y + z &= 1 \\ -x + y + z &= 5 \end{aligned}$$

Řešení:

Dosazovací metoda: (například) z první rovnice vyjádříme (například) x, tj. $x = 11 - y + z$ a dosadíme do zbývajících dvou rovnic:

$$\left.\begin{array}{r} 11 - y + z - y + z = 1 \\ -(11 - y + z) + y + z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -2y + 2z = -10 \\ 2y = 16 \end{array}\right.$$

Odtud snadno dostaneme $y = 8$; $z = 3$ a dosazením do libovolné ze tří původních rovnic $x = 6$. Soustava má **jedno řešení** $[x, y, z] = [6; 8; 3]$**.**

Sčítací metoda: Sečteme vhodné násobky rovnic tak, abychom se zbavili jedné neznámé. Obdržíme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Jak je vidět níže, v tomto případě se vhodným sečtením zbavíme dokonce dvou neznámých:

Sečteme první a druhou rovnici:

$$\begin{array}{r} x + y - z = 11 \\ x - y + z = 1 \\ \hline 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \end{array}$$

Sečteme druhou a třetí rovnici:

$$\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 5 \\ \hline 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \end{array}$$

Hodnotu neznámé y zjistíme opět dosazením $x = 6$; $z = 3$ do libovolné ze tří původních rovnic.

2. příklad: Řešme soustavu

$$\begin{array}{r} x + y - z = 11 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 5 \end{array}.$$

Řešení: Sečtením první a druhé rovnice dostaneme $2x = 12 \Rightarrow x = 6$. Dosazením této hodnoty do druhé a třetí rovnice tedy dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\left.\begin{array}{r} 6 - y + z = 1 \\ -6 + y + z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -y + z = -5 \\ y + z = 11 \end{array}\right..$$

Tyto rovnice lze opět sečíst, dostaneme $2z = 6 \Rightarrow z = 3$ a dosazením této hodnoty do kterékoli rovnice dopočítáme $y = 8$. Řešením naší soustavy je tedy $[x; y; z] = [6; 8; 3]$.

Neřešené úlohy:

1) $$\begin{array}{r} x - y - z = 5 \\ y - x - z = 1 \\ z - x - y = -15 \end{array}$$

2) $$\begin{array}{r} x + 2y - 3z = -8 \\ -3x + y + 2z = 10 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{array}$$

3) $$\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y - 2z = 0 \\ -4x + 2y + 3z = 8 \end{array}$$

4) $$\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ y - 3z = -5 \\ 5z - x = 14 \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} x + y = 13 \\ x - z = 5 \\ y - z = 2 \end{array}$$

6) $$\begin{array}{r} x + y = 28 \\ x + z = 30 \\ y + z = 32 \end{array}$$

7) $$\begin{array}{r} x - y = \frac{1}{3} \\ y - z = \frac{1}{6} \\ x + z = \frac{4}{3} \end{array}$$

8) $$\begin{array}{r} x + 2y = \frac{7}{4} \\ y + 3z = \frac{5}{2} \\ 4x + z = \frac{11}{3} \end{array}$$

9) $$\begin{array}{r} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 1 \end{array}$$

10) Nádrž se plní třemi přívody A,B,C. Současně otevřenými přívody A,B se naplní za hodinu, přívody A,C za 45 minut a přívody B,C za hodinu a půl. Jak dlouho by se plnila každým přívodem zvlášť?

Výsledky:

1) $[7;5;-3]$ **2)** $[3;5;7]$ **3)** $[0;1;2]$ **4)** $[1;4;3]$ **5)** $[5;8;3]$ **6)** $[13;15;17]$

7) $\left[\frac{11}{12};\frac{7}{12};\frac{5}{12}\right]$ **8)** $\left[\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$ **9)** $[12;-60;60]$

10) A 1 hod 12 min, B 6 hodin, C 2 hodiny

4.6 Kvadratické rovnice a nerovnice

Kvadratická rovnice (s neznámou x) je rovnice, kterou lze převést na tvar

$$ax^2+bx+c=0\,;\ a\neq 0\,,$$

kde ax^2 je kvadratický, bx lineární a c absolutní člen (a,b,c jsou známá čísla). Rovnici řešíme doplněním kvadratického trojčlenu na levé straně na úplný čtverec:

$$\left.\begin{array}{lll} ax^2 + & bx & +c=0 \\ x^2 + & \frac{b}{a}x & +\frac{c}{a}=0 \\ A^2 & +2AB+B^2 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} A^2=x^2 \Rightarrow A=x \\ 2AB=\frac{b}{a}x \Rightarrow 2B=\frac{b}{a} \Rightarrow B=\frac{b}{2a} \\ \boxed{B^2=\frac{b^2}{4a^2}} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} A^2 + 2AB + B^2 \\ x^2 + \frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \\ (A+B)^2 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad -\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \end{array}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

O existenci řešení v oboru reálných čísel rozhoduje existence reálné odmocniny $\sqrt{b^2-4ac}$, tj. znaménko výrazu $D=b^2-4ac$, který nazýváme **diskriminant** kvadratické rovnice:

a) Je-li $D > 0$: dva kořeny reálné různé: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

b) je-li $D = 0$: kořen reálný dvojnásobný $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$,

c) je-li $D < 0$: dva kořeny komplexně sdružené

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)\cdot(-D)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b \pm i\cdot\sqrt{-D}}{2a}$$

Poznámky:

ad b) Dvojnásobný kořen rovnice lze chápat jako dvojím způsobem: Je-li $D = 0$, pak množina K všech řešení je **jednoprvková**. V tomto smyslu je to kořen **jediný**. Dvojnásobný kořen lze však chápat také jako **dva kořeny, které splynuly,**

ad c) Pozor! Je-li $D < 0$, pak $-D > 0$.

1. Příklad: Řešme rovnice

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ c) $x^2 - 4x + 13 = 0$

Řešení:

a) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$; tj. $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{3}{2}$, tedy $K = \left\{2; -\frac{3}{2}\right\}$

b) $x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-144}}{8} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$; tj. $x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$, tedy $K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

c) $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$

Tato rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel. V oboru komplexních čísel je

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}i}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2+3i \\ 2-3i \end{array} \right. ; \text{ tj. } x_1 = 2+3i; \quad x_2 = 2-3i.$$

2. Příklad: Jedna ze dvou firem může vyrobit zboží na zakázku o čtyři dny dříve, než druhá. Kdyby firmy vyráběly společně, vyrobily by za 24 dny pětkrát více zboží než požaduje zakázka. Za jakou dobu by splnila zakázku každá firma zvlášť?

Řešení:

Neznámé (doba práce první, resp. druhé firmy) x ; y,

část zakázky splněná první, resp. druhou firmou za jeden den $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$,

část zakázky splněná za 24 dny oběma firmami $24\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$.

Tato „zakázka“ má být pětkrát větší, tj. má platit (první rovnice) $24\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 5$.

První firma má splnit o čtyři dny dříve, než druhá (druhá rovnice) $x = y - 4$.

$$24\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=5$$

$$x=y-4$$

Dosadíme-li ze druhé rovnice do první, dostaneme:

$$24\cdot\left(\frac{1}{y-4}+\frac{1}{y}\right)=5$$

$$24(y+y-4)=5y(y-4)$$

$$48y-96=5y^2-20y$$

$$5y^2-68y+96=0.$$

Pomocí výše uvedeného vzorce najdeme kořeny $y_1=12\,;y_2=1{,}6$. Dosazením do druhé rovnice soustavy obdržíme

$$x_1=y_1-4=12-4=8\,;$$

$$x_2=y_2-4=1{,}6-4=-2{,}4$$

Zadaná soustava má tedy dvě řešení: $\left[x_1;y_1\right]=[12;8]$; $\left[x_2;y_2\right]=[1.6;-2.4]$, druhé z nich však nevyhovuje zadání úlohy (firma nemůže splnit zakázku v záporné době). Jedna firma by tedy sama splnila zakázku za dvanáct dní, druhá sama za osm dní.

Uvažujme rovnici tvaru $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$. Dosadíme-li za x některé z čísel $x_1;x_2$, je rovnice zřejmě splněna . Čísla $x_1;x_2$ jsou tedy kořeny této rovnice. Roznásobme závorky:

$$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$$

$$x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2=0.$$

$$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$$

Máme-li nyní kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0;a\neq 0$, lze ji zapsat v tzv. normovaném tvaru $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, resp. $x^2+px+q=0$, kde $p=\frac{b}{a};q=\frac{c}{a}$. Porovnáme-li však tento normovaný tvar s výše uvedeným zápisem

$$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$$

$$x^2\quad+\frac{b}{a}\quad\cdot x\quad+\frac{c}{a}\quad=0$$

$$x^2\quad+p\quad\cdot x\quad+q\quad=0$$

dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned}x_1+x_2&=-p=-\frac{b}{a}\\ x_1\cdot x_2&=q=\frac{c}{a}\end{aligned}}$$

Je-li x_1 kořen kvadratické rovnice, výraz $x-x_1$ se nazývá **kořenový činitel** a rozklad kvadratického trojčlenu $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, resp. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$ se nazývá **rozkladem na součin kořenových činitelů**.

3. Příklad: Určeme kořeny rovnice rozkladem kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů: a) $x^2+3x+2=0$ b) $x^2-x-6=0$ c) $x^2-9x+20=0$.

Řešení:

a) Hledáme dvě čísla $x_1;x_2$, jejichž součinem je dvojka a součtem mínus trojka. Těmto podmínkám vyhovují čísla $x_1=-1;x_2=-2$, tato čísla jsou tedy kořeny naší rovnice.

Pozor! Rozklad na součin kořenových činitelů je $(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, tedy v našem případě

$$[x-(-1)]\cdot[x-(-2)]=(x\oplus 1)\cdot(x\oplus 2)$$

b) Tentokrát musí být $x_1\cdot x_2=-6$; $x_1+x_2=1$, je tedy $x_1=3;x_2=-2$.

c) Konečně $x_1\cdot x_2=20$; $x_1+x_2=9$; tj. $x_1=5;x_2=4$.

Kvadratická nerovnice je nerovnice v některém z tvarů $L(x)<0$; $L(x)>0$; $L(x)\le 0$; $L(x)\ge 0$, kde $L(x)$ je kvadratický trojčlen. Tuto nerovnici řešíme rozkladem kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů a dále pak metodou nulových bodů (viz kpt. 4.2. př. 10.).

4. Příklad: Řešme kvadratickou nerovnici $x^2+11x+24<0$

Řešení: Nulové body kvadratického trojčlenu zjistíme buď vzorcem pro řešení kvadratické rovnice nebo pomocí vlastnosti kořenových činitelů: zde má být $x_1+x_2=-11$; $x_1\cdot x_2=24$. Je tedy $x_1=-8;x_2=-3$. Daná nerovnice je tedy ekvivalentní s nerovnicí $(x+8)(x+3)<0$. Pro $x<-8$ jsou obě závorky záporné, pro $x>-3$ pak obě kladné, jejich součin je tedy kladný. Pro $x\in(-8;-3)$ mají závorky různá znaménka, jejich součin je tedy záporný a tento interval je řešením dané nerovnice, tj. $K=(-8;-3)$

5. Příklad: Řešme kvadratickou nerovnici $-x^2+4x-4<0$.

Řešení: Vynásobme nerovnici minus jedničkou: $x^2-4x+4\boxed{>}0$ (pozor – je nutné změnit znaménko nerovnosti). Kvadratický trojčlen je druhou mocninou dvojčlenu: $(x-2)^2>0$. Tato mocnina má jediný nulový bod $x=2$, pro $x\ne 2$ je vždy kladná. Množina všech řešení nerovnice tedy je $K=\mathbb{R}-\{2\}$.

6. Příklad: Řešme kvadratickou nerovnici $x^2+6x+10<0$.

Řešení: Diskriminant kvadratického trojčlenu $L(x)=x^2+6x+10$ je roven $D=36-4\cdot 10=-4$, tento trojčlen tedy nemá nulové body, dosazením např. $x=0$ zjistíme, že $L(0)=0^2+6\cdot 0+10=10>0$, a nerovnice tedy nemá řešení ($K=\emptyset$).

Neřešené úlohy:

Řešte v $\mathbb{R}$:

1) $x^2-6x-216=0$

2) $3x^2-8x+4=0$

3) $11x^2+13x-138=0$

4) $\dfrac{4x+5}{x}-\dfrac{12}{x-2}=1$

5) $\dfrac{2x+1}{x+3}-\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{x+3}{3-x}-\dfrac{4+x}{3+x}$

6) $\dfrac{18y+7}{y^3-1}=\dfrac{30}{y^2-1}-\dfrac{13}{y^2+y+1}$

Rozložte kvadratické trojčleny:

7) $x^2-9x-22$

8) $2x^2-5x+2$

9) $x^2-7x+12$

10) $x^2-x-132$

11) $x^2-10x+24$

12) $x^2+27x+126$

Řešte v $\mathbb{R}$:

13) $x^2 - 5x + 6 < 0$

14) $x^2 - 7x - 8 < 0$

15) $x^2 + 8x \le 0$

16) $\dfrac{6x-5}{4x+1} < 0$

17) $\dfrac{5x-6}{x+6} < 1$

18) $\dfrac{x+1}{3x-2} < 2$

19) $x(x^2 - 7x + 10) > 0$

20) $x^6 - 9x^3 + 8 > 0$

21) $x^4 + x^3 - x - 1 > 0$

22) $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x} > \dfrac{1}{4x} - 1$

23) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{7}{x+2} < \dfrac{6}{x-1}$

24) $\dfrac{1-2x}{1+x} - \dfrac{1+x}{1+2x} \ge 1$

25) $2 - \dfrac{x-3}{x-2} \ge \dfrac{x-2}{x-1}$

26) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1} < 0$

27) $\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{-x-1} < 0$

28) $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} > 0$

29) Do stanice vzdálené 130 km vyjede osobní vlak, za dvě hodiny po něm rychlík. Ten ujede za hodinu o 30km delší dráhu, takže dojede k cíli o 10 minut dříve, než osobní vlak. Jaká je průměrná rychlost vlaků?

30) Propast je hluboká 150 m. Za jak dlouho dopadne kámen, který do ní volně pustíme?

31) Vodní nádrž se naplní prvním přívodem o čtyři, druhým o devět hodin později, než by se naplnila oběma současně. Za jakou dobu se naplní každým přívodem zvlášť?

Výsledky:

1) $18;-12$ **2)** $2;\dfrac{2}{3}$ **3)** $3;-\dfrac{46}{11}$ **4)** $5;-\dfrac{2}{3}$ **5)** 0.1 **6)** $9;-4$

7) $(x+2)(x-11)$ **8)** $2(x-0.5)(x-2)$ **9)** $(x-3)(x-4)$ **10)** $(x+11)(x-12)$

11) $(x-4)(x-6)$ **12)** $(x+21)(x+6)$ **13)** $(2;3)$ **14)** $\mathbb{R} - \langle -1;8 \rangle$ **15)** $\left\langle -\dfrac{8}{3};0 \right\rangle$

16) $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{6} \right)$ **17)** $(-6;3)$ **18)** $\mathbb{R} - \left\langle \dfrac{2}{3};1 \right\rangle$ **19)** $(0;2) \cup (5;\infty)$ **20)** $(1;2) \cup (2;3)$

21) $\mathbb{R} - \langle -1;1 \rangle$ **22)** $\mathbb{R} - \left\langle 0;\dfrac{1}{12} \right\rangle$ **23)** $(-\infty;-2) \cup \left(-\dfrac{5}{4};-1 \right) \cup (1;5)$ **24)** $\left(-1;-\dfrac{1}{2} \right)$

25) $\left(1;\dfrac{3}{2} \right\rangle \cup (2;\infty)$ **26)** $(-3;1)$ **27)** $(-\infty;-2) \cup (-2;-1) \cup (1;\infty)$

28) $(-\infty;-5) \cup (1;2) \cup (6;\infty)$ **29)** $30\ kmh^{-1}$; $60\ kmh^{-1}$ **30)** $\sqrt{30}\ s$ **31)** 1. přívod: 10 hod., 2. přívod: 15 hod.

4.7 Iracionální rovnice a nerovnice

Iracionální rovnice je rovnice s neznámou pod odmocninou nebo s neznámou umocněnou na racionální exponent. Při jejím řešení celou rovnici umocňujeme, což není ekvivalentní úprava, ale úprava transcendentní (viz kpt. 4.1 př. 2.). Součástí řešení, které tyto úpravy používá, musí být zkouška.

1. Příklad: Řešme rovnici $\sqrt{2x+4} = 3$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení: **Zkouška:**

$$\sqrt{2x+4} = 3 \, /(\;)^2 \qquad L\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{2\cdot\frac{5}{2}+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$2x+4 = 9 \qquad P\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

$$x = \frac{5}{2} \qquad L = P$$

Číslo $x = \frac{5}{2}$ tedy je řešením rovnice.

2. Příklad: Řešme rovnici $\sqrt{2x+7} = x-5$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\sqrt{x+7} = x-5 \, /(\;)^2$$

$$x+7 = x^2-10x+25$$

$$x^2-11x+18 = 0$$

$$x_1 = 2; x_2 = 9$$

Zkouška:

$L(2) = \sqrt{2+7} = 3 \quad P(2) = 2-5 = -3 \quad L(2) \neq P(2)$

$L(9) = \sqrt{9+7} = 4 \quad P(9) = 9-5 = 4 \quad L(9) = P(9)$

Číslo $x = 2$ tedy nevyhovuje a jediným řešením rovnice je $x = 9$.

3. Příklad: Řešme rovnici $\sqrt{5-5y} = \sqrt{3y-11}$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\sqrt{5-5y} = \sqrt{3y-11} \, /(\;)^2 \qquad L(2) = \sqrt{-5-5\cdot 2} = \sqrt{-15}$$

$$5-5y = 3y-11$$

$$y = 2$$

Pro číslo $y = 2$ není definována odmocnina na levé straně (ani na pravé – ale to již zjišťovat nemusíme). Toto číslo tedy nemůže být řešením. Rovnice nemá řešení.

V případě, že rovnice obsahuje součet popř. rozdíl odmocnin, musíme umocňovat dvakrát:

4. Příklad: Řešme rovnici $\sqrt{x+9} + 3\sqrt{x} = 7$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$\sqrt{x+9} + 3\sqrt{x} = 7 \, /(\;)^2$$

$$x+9+6\sqrt{x}\sqrt{x+9}+9x = 49$$

$$6\sqrt{x}\sqrt{x+9} = 40-10x$$

$$3\sqrt{x}\sqrt{x+9} = 20-5x \, /(\;)^2$$

$$9x(x+9) = 400-200x+25x^2$$

$$16x^2-281x+400 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{281 \pm \sqrt{281^2-4\cdot 16\cdot 400}}{32} = \frac{281 \pm 231}{32} = \left\langle \begin{array}{l} 16 \\ \frac{25}{16} \end{array} \right.$$

Zkouškou zjistíme, že kořenem je pouze číslo $x = \frac{25}{16}$.

4. Příklad: Řešme rovnici $2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 1 - 2x$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení:

$$2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 1 - 2x \,/()^2$$

$$4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 1 - 4x + 4x^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

Poslední rovnice je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$, současně však výraz pod odmocninou v první rovnici musí být nezáporný. Stejně tak musí být nezáporná i pravá strana první rovnice. Musí tedy být $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, což je splněno vždy, ale také $1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Množina všech řešením dané rovnice je tedy $K = \left(-\infty \;; \frac{1}{2}\right\rangle$.

Při řešení iracionálních nerovnic je třeba si uvědomovat, že pro každá dvě **nezáporná čísla** $a;b$ platí: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ a pro libovolná dvě nekladná čísla $c;d$ platí $c < d \Leftrightarrow c^2 > d^2$.

5. Příklad: Řešme nerovnici $\sqrt{x^2 + 2x + 5} > x - 7$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení: Řešením nerovnice $x^2 + 2x + 5 > 0$ se přesvědčíme, že kvadratický trojčlen pod odmocninou je kladný pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy i daná nerovnice je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zároveň je levá strana nerovnice vždy kladná. Pro pravou stranu mohou nastat dva případy:

a) $x - 7 < 0 \Rightarrow x < 7$. Pro tato x je levá strana kladná, pravá záporná a interval $(-\infty;7)$ je tedy řešením nerovnice.

b) Je-li $x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$, můžeme zadanou nerovnici umocnit:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} > x - 7 \,/(\;)^2$$

$$x^2 + 2x + 5 > x^2 - 14x + 49$$

$$x > \frac{11}{4}$$

Protože $\left(x > \frac{11}{4}\right) \wedge (x \geq 7) \Rightarrow x \geq 7$, je množina všech řešení $K = (-\infty;7) \cup \langle 7;\infty) = \mathbb{R}$.

6. Příklad: Řešme nerovnici $9\sqrt{9y - y^2 - 8} \geq 7y$ v množině $\mathbb{R}$.

Řešení: Kvadratický trojčlen pod odmocninou je nezáporný pro $y \in \langle 1;8 \rangle$, pro tato y je pravá strana kladná, nerovnici tedy můžeme umocnit:

$$9\sqrt{9y-y^2-8} \geq 7y \,/(\ )^2$$
$$81\cdot(9y-y^2-8) \geq 49y^2$$
$$130y^2-729y+648 \leq 0$$
$$y_1=\frac{72}{65};\, y_2=\frac{9}{2}$$

Nalezli jsme nulové body, je tedy $\left(y-\frac{72}{65}\right)\cdot\left(y-\frac{9}{2}\right) \leq 0$. Tento součin je záporný nebo roven nule (tj. nekladný) pro $y \in \left\langle \frac{72}{65};\frac{9}{2} \right\rangle$ (zde je první závorka kladná, druhá záporná).

Množina všech řešení je tedy $K=\langle 1;8\rangle \cap \left\langle \frac{72}{65};\frac{9}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{72}{65};\frac{9}{2} \right\rangle$.

Neřešené úlohy:

Řešte rovnice v množině $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=0$

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}$

3) $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}}=x+1$

4) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}$

Řešte nerovnice v množině $\mathbb{R}$:

5) $\sqrt{x^2+x-12}<6-x$

6) $x-3\sqrt{x}-4 \geq 0$

7) $3x-2\sqrt{x}-1 \leq 0$

8) $\sqrt{x-2}+x>4$

Výsledky

1) nemá řešení **2)** $\frac{5}{2}$ **3)** $\{0;2\}$ **4)** $\frac{5}{3}$ **5)** $\left(-\infty;\frac{48}{13}\right)$ **6)** $\langle 16;+\infty)$ **7)** $\langle 0;1\rangle$ **8)** $(3;+\infty)$

4.8 Rovnice s parametry

V rovnicích se často kromě neznámých vyskytují čísla, která mohou nabývat více hodnot – **parametry**. Taková čísla rovněž značíme písmeny. V zadání rovnice je pak řečeno, které písmeno značí neznámou a která písmena jsou parametry. Rovnici pak řešíme vzhledem k těmto parametrům a provádíme diskusi řešení. Řešíme tak současně celou množinu rovnic, protože pro různé hodnoty parametru dostáváme různé rovnice.

1. Příklad: V množině $\mathbb{R}$ řešme rovnici $p(2-p)x=4p$ s neznámou x a parametrem p.

Řešení: Rovnice je definována pro každé $p \in \mathbb{R}$, hledáme tedy řešení pro každé reálné p. Je-li $p(2-p) \neq 0$, dostáváme:

$$p(2-p)x=4p \,/ : p(2-p)$$
$$x=\frac{4}{2-p}$$

Diskuse řešení: Pro $p=0$ (viz první úpravu) dostáváme rovnost $0=0$ a řešením je každé reálné číslo. Je-li $p=2$, dostáváme rovnici $0\cdot x=8$, která nemá řešení.

Závěr: Je-li $p=0$, pak řešením je každé reálné číslo, tj. $x \in \mathbb{R}$.
Je-li $p=2$, pak rovnice nemá řešení.

Je-li $p \notin \{0; 2\}$, pak $x = \dfrac{4}{2-p}$.

2. Příklad: V množině $\mathbb{R}$ řešme rovnici $\dfrac{x+p}{p} = px - 1$ s neznámou x a parametrem p.

Řešení: Rovnice není definována pro $p = 0$, hledáme tedy řešení pro $p \neq 0$“

$$\frac{x+p}{p} = px - 1$$
$$x + p = p^2 x - p$$
$$(1-p^2)x = -2p \,/ : (1-p^2); p \neq \pm 1$$
$$x = \frac{p^2 - 1}{2p}$$

Diskuse řešení: Pro $p = 0$ není daná rovnice definována. Úprava v předposledním řádku je proveditelná pouze pro $p \neq \pm 1$. V případě, že $p = \pm 1$, je $0 \cdot x = \pm 2$ a rovnice nemá řešení.

Závěr: Je-li $p = 0$, pak rovnice není definována.
Je-li $p = \pm 1$, pak rovnice nemá řešení.
Je-li $p \neq 0 \wedge p \neq \pm 1$, pak $x = \dfrac{p^2 - 1}{2p}$.

3. Příklad: Řešme rovnici $\dfrac{2 + ax}{a + x} = 2a$ s neznámou x v množině $\mathbb{R}$ a parametrem $a \in \mathbb{R}$.
Řešení: Rovnice není definována pro $x = -a$, hledáme tedy řešení v množině $\mathbb{R} - \{-a\}$:

$$\frac{2 + ax}{a + x} = 2a$$
$$2 + ax = 2a(a + x)$$
$$2 + ax = 2a^2 + 2ax$$
$$2 - 2a^2 = ax \,/ a; a \neq 0$$
$$x = \frac{2(1 - a^2)}{a}$$

Diskuse řešení: Poslední úprava je možná jen tehdy, je-li $a \neq 0$. Pro $a = 0$ dostáváme rovnici $2 = 0 \cdot x$, která nemá řešení. Nalezená hodnota neznámé je řešením dané rovnice právě tehdy, když $\dfrac{2(1-a^2)}{a} \in \mathbb{R} - \{-a\}$, tj.

$$\frac{2(1-a^2)}{a} \neq -a$$
$$2 - 2a^2 \neq -a^2$$
$$2 \neq a^2$$
$$a \neq \pm\sqrt{2}$$

Závěr: Je-li $a \in \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$, pak rovnice nemá řešení.
Je-li $a \notin \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$, pak $x = \dfrac{2(1-a^2)}{a}$.

4. Příklad: Řešme rovnici $tx^2 + t^2x + t = 0$ s neznámou x v množině $\mathbb{R}$ a parametrem t.

Řešení: Rovnice je definována pro každé $t \in \mathbb{R}$, hledáme tedy řešení na celé množině $\mathbb{R}$:

$$tx^2 + t^2x + t = 0 / : t; \quad t \neq 0$$
$$x^2 + tx + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

Diskuse řešení: Pro $t = 0$ (viz první úpravu) dostáváme rovnost $0 = 0$ a řešením je každé reálné číslo. Je-li $t^2 - 4 < 0$, tj. $|t| < 2$, rovnice nemá řešení v $\mathbb{R}$. Je-li $|t| = 2$, má rovnice dvojnásobný reálný kořen, a sice pro $t = -2$ je $x_1 = x_2 = 1$ a pro $t = 2$ pak $x_1 = x_2 = -1$. Pro $|t| > 2$ dostáváme dva reálné různé kořeny dané výše uvedeným vzorcem.

Závěr: Je-li $t = 0$, pak $x \in \mathbb{R}$.
Je-li $|t| < 2$, pak rovnice nemá řešení.
Je-li $t = 2$, pak $x_1 = x_2 = 1$.
Je-li $t = -2$, pak $x_1 = x_2 = -1$.
Je-li $|t| > 2$, pak $x_{1,2} = \dfrac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$.

5. Příklad: Řešme rovnici $\dfrac{az^2 + (a-1)z - 1}{a-3} = 0$ s neznámou z v množině $\mathbb{R}$.

Řešení: Rovnice není definována pro $a = 3$, hledáme tedy řešení pro parametr $a \in \mathbb{R} - \{3\}$.

$$\frac{az^2 + (a-1)z - 1}{a-3} = 0 / \cdot (a-3)$$
$$az^2 + (a-1)z - 1 = 0 / (a \neq 0)$$
$$z_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4a}}{2a}$$
$$z_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a^2 + 2a + 1}}{2a}$$
$$z_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2a}$$
$$z_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm (a+1)}{2a} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \\ -1 \end{array} \right.$$

Diskuse řešení: Pro $a = 0$ dostáváme lineární rovnici $-z - 1 = 0$, která má kořen $z = -1$. Diskriminant kvadratické rovnice $D = (a+1)^2$ je vždy nezáporný, pro $a \notin \{0, -3\}$ má rovnice nalezené řešení. Pro $a = -1$ je $D = 0$ a rovnice má dvojnásobný kořen $z_1 = z_2 = -1$.

Závěr: Je-li $a = 3$, pak rovnice není definována.
Je-li $a \in \{-1; 0\}$, pak : $z_1 = z_2 = -1$.
Je-li $a \notin \{0; 3; -1\}$, pak $z_1 = -1$; $z_2 = \dfrac{1}{a}$.

Neřešené úlohy:

Řešte rovnice s neznámou x, resp. y a parametrem p, resp. a:

1) $p^2x^2 + px - 1 = 0$

2) $\dfrac{2a(y-1)}{y+1} = 5$

3) $\dfrac{y+a}{2} - \dfrac{2}{y+a} = \dfrac{y-a}{2}$

4) $ax^2 + 2ax + a - 1 = 0$

Výsledky:

1) $p = 0$: nemá řešení; $p \neq 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2p}$ **2)** $a \in \left\{0; \dfrac{5}{2}\right\}$: nemá řešení; $a \notin \left\{0; \dfrac{5}{2}\right\}$: $y = \dfrac{2a+5}{2a-5}$ **3)** $a = 0$: nemá řešení; $a \neq 0$: $y = \dfrac{2-a^2}{a}$ **4)** $a \leq 0$: nemá řešení; $a > 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a}}{a}$.

4.9 Vyjadřování neznámé z technických vzorců

1. Příklad: Při namáhání válcové tyče kroucením se její podstava pootočí o úhel φ, pro který platí

$$\varphi = \frac{2lM}{\pi G r^4},$$

kde l je délka tyče, r její poloměr, M moment krouticích sil a G je modul torze materiálu. Vyjádřeme z tohoto vzorce poloměr r.

Řešení: Vzorec je z matematického hlediska rovnicí s neznámou r, všechna ostatní písmena představují parametry. Je tedy:

$$\varphi = \frac{2lM}{\pi G r^4}$$

$$\varphi \pi G r^4 = 2lM$$

$$r^4 = \frac{2lM}{\varphi \pi G}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{2lM}{\varphi \pi G}}$$

Diskusi řešení v těchto případech většinou není třeba provádět, neboť podmínky jsou většinou dány technickou povahou problému – zde mají všechny parametry i neznámá kladnou hodnotu.

2. Příklad: Pro středový ráz pružných koulí, z nichž jedna je před rázem v klidu platí

$$v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2},$$

kde $m_1; m_2$ jsou hmotnosti koulí a $v_1; v'_1$ je rychlost pohybující se koule před resp. po nárazu. Vyjádřete hmotnost m_2 koule, která je před nárazem v klidu.

Řešení:

$$v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$
$$v'_1(m_1 + m_2) = v_1(m_1 - m_2)$$
$$v'_1 m_1 + v'_1 m_2 = v_1 m_1 - v_1 m_2$$
$$v_1 m_2 + v'_1 m_2 = v_1 m_1 - v'_1 m_1$$
$$(v_1 + v'_1) m_2 = (v_1 - v'_1) m_1$$
$$m_2 = \frac{(v_1 - v'_1) m_1}{(v_1 + v'_1)}$$

Neřešené úlohy:

1) Celková kapacita C seriově řazených kondenzátorů o kapacitách $C_1; C_2; C_3$ je určena vzorcem $C = \dfrac{1}{C_1^{-1} + C_2^{-1} + C_3^{-1}}$. Z tohoto vzorce vyjádřete kapacitu C_2.

2) Nejpravděpodobnější rychlost molekul v plynu je dána vzorcem $c = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$, kde R je univerzální plynová konstanta, T absolutní teplota plynu a M jeho molová hmotnost. Vyjádřete absolutní teplotu plynu.

3) Pro výšku stacionární družice nad povrchem planety platí $h = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2}{\omega^2}} - R$, kde R je poloměr planety, ω úhlová rychlost a g je gravitační zrychlení ve výšce h. Vyjádřete úhlovou rychlost ω.

4) Pro první kosmickou rychlost ve výšce h nad povrchem planety platí $v_I = \sqrt{g \cdot \dfrac{R^2}{R + h}}$, kde R je poloměr planety, h výška satelitu, g je gravitační zrychlení ve výšce h. Vyjádřete poloměr planety.

5) Frekvence kmitající kruhové membrány je dána vzorcem $f = \dfrac{c}{d}\sqrt{\dfrac{p}{t\rho}}$, kde c je materiálová konstanta, d je průměr membrány, t tloušťka membrány, ρ hustota a p napětí na obvodu. Vyjádřete tloušťku membrány.

6) Síla, kterou na sebe vzájemně působí dva bodové elektrické náboje, je dána vztahem $F = \varepsilon \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$, kde ε je permitivita, $Q_1; Q_2$ velikost nábojů, r jejich vzdálenost. Vyjádřete vzdálenost nábojů.

7) Amplituda nucených kmitů je dána vzorcem $A = \dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{1}{2b \cdot \sqrt{\omega^2 - b^2}}$, kde F_0 je amplituda budicí síly, m hmotnost kmitajícího tělesa, ω úhlová rychlost, b útlum. Vyjádřete útlum.

Výsledky:

1) $C_2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{C_1} - \dfrac{1}{C_3}}$ **2)** $T = \dfrac{c^2 M}{2R}$ **3)** $\omega = R \cdot \sqrt{\dfrac{g}{(h+R)^3}}$ **4)** $R = \dfrac{v_I^2 + v_I\sqrt{v_I^2 - 4gh}}{2g}$

5) $t = \dfrac{c^2 p}{d^2 f^2 \rho}$ **6)** $r = \sqrt{\varepsilon \dfrac{Q_1 Q_2}{F}}$ **7)** $b = \sqrt{\omega^2 - \dfrac{F_0^2}{4A^2 m^2 b^2}}$